

УДК 622.62

Басс К. М., Плахотник В. В., Кривда В. В.

## ПЛОСКОСТНОЕ И ПРОСТРАНСТВЕННОЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ КАРЬЕРНОГО АВТОТРАНСПОРТА

Исследуя динамику автомобиля как сложной многомассовой системы, необходимо учитывать, что при различных режимах движения влияние механических характеристик отдельных элементов машины проявляется в разной степени.

Значительный вклад в развитие теории и практики использования автомобильного транспорта на открытых горных разработках внесли М. В. Васильев, А. А. Кулешов, А. Н. Казарез, Н. В. Мельников, М. Г. Потапов, В. В. Ржевский, В. П. Смирнов, И. М. Циперфин, В. Д. Штейн, Б. Я. Яковенко, Зырянов И. В., Бунякин А. В., Смирнов Г. А. [1, 2, 3] и др. Ими были созданы математические модели для исследования динамических процессов карьерного автомобильного транспорта, учитывающие особенности эксплуатации (в частности неровности дороги, удар при экскаваторной загрузке). Составленные при этом уравнения движения представляют собой систему нелинейных дифференциальных уравнений, которые решаются при заданных начальных условиях в определенном промежутке интегрирования с использованием специально разработанного алгоритма итерационно-разностного типа с определением точек разрыва правых частей [1, 2, 3].

Дальнейшие усовершенствования конструкций автосамосвалов, которые работают в особо сложных условиях, и оценка их работоспособности, требуют привлечения при составлении расчетной схемы большего числа конструктивных и технологических факторов, что позволяет определить их влияние на эксплуатационные характеристики машины и её надежность. Поэтому, исследование динамики машины и получение амплитудно-частотных характеристик в зависимости от физико-механических свойств упругих связей и масс отдельных частей машины является актуальной задачей.

Проведем исследование динамики прямолинейного движения машины без учета бокового уклона дороги.

Цель работы – составление расчетных схем и уравнений движения при прямолинейном движении машины с учетом характеристик ее упругих связей и профиля дороги.

*Составление плоскостной расчетной схемы и уравнения движения.*

При составлении пространственной расчетной схемы автомобиля допускаем, что механические характеристики колес, расположенных на одной оси соответствующих мостов – одинаковы. В этом случае автосамосвал можно представить в виде системы тел (рис. 1), соединенных между собой упругими и неупругими связями, причем функции, описывающие взаимодействие колес автомобиля с дорогой, моделируют различные условия движения.

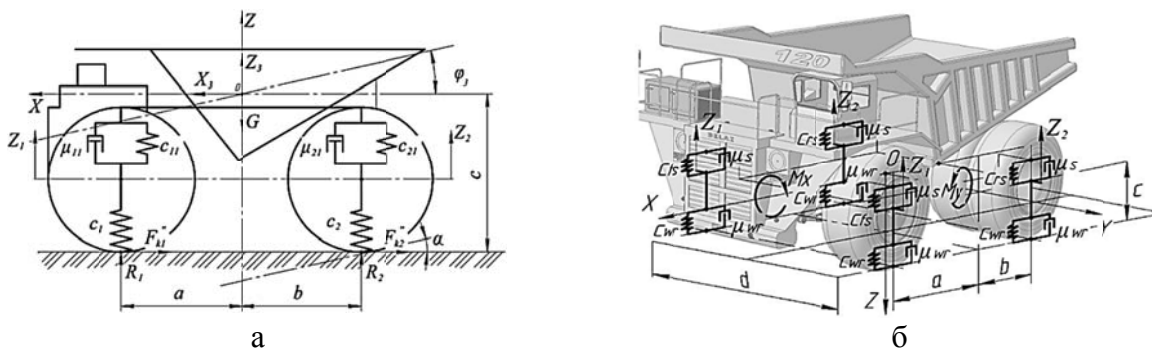


Рис. 1. Расчетные схемы движения карьерного автосамосвала:

а – плоскостная расчетная схема карьерного автосамосвала; б – пространственная расчетная схема транспортного средства

На рис. 1 обозначено:  $a, b, c$  – размеры, определяющие положение центра масс автомобиля относительно осей колес и полотна дороги, межосевое расстояние (база автосамосвала) –  $L = (a + b)$ ,  $d$  – колея автосамосвала;  $c_{wr}, \mu_{wr}$  – коэффициенты жесткости и демпфирования передних и задних колес;  $c_s, c_{wr}, \mu_s, \mu_{wr}$  – коэффициенты жесткости и демпфирования соответственно подвесок и колес;  $Z$  – относительное перемещение подрессоренной массы кузова перпендикулярно курсу движения автомобиля;  $Z_1, Z_2$  – перемещение осей соответственно передних и задних колес перпендикулярно курсу движения автомобиля;  $X$  – перемещение центра масс автомобиля по курсу его движения;  $\varphi$  – угол поворота кузова относительно оси, проходящей через центр масс кузова перпендикулярно плоскости  $XOZ$ ;  $\varphi_1, \varphi_2$  – угол поворота колес относительно оси;  $\psi$  – угол поворота кузова вокруг оси  $X$ ;  $\alpha$  – угол наклона полотна дороги по направлению движения;  $m_1, m_2, m_B, G_1, G_2, G$  – масса и вес соответственно передних, задних колес и кузова автосамосвала. Взаимодействие с дорожным покрытием выражается через нормальные реакции  $R_F, R_R$ , и силы сопротивления качению  $F_{k1}$  и  $F_{k2}$ .

Движение автомобиля рассматриваем в плоскости  $XOZ$ , проходящей через продольную ось автомобиля. Для составления уравнения движения воспользуемся уравнением Лагранжа второго рода, где при составлении выражений для кинетической  $T$  и потенциальной энергии  $\Pi$ , диссипативной функции  $D$ , были использованы значения масс и моментов инерции  $m_1, m_2, J_1, J_2$  передних и задних колес, массы и момента инерции кузова  $m_3, J_3$ , (в качестве обобщенных координат были выбраны  $Z_1, Z_2, Z_3, x, \varphi_3$ ) для плоскостной расчетной схемы, а также использованы значения масс и моментов инерции  $m_1, m_2, m_B, J_{YB}, J_{XB}, J_{Y1}, J_{Y2}$ . В качестве обобщенных координат  $Q_i$  были выбраны  $X, Z_1, Z_2, Z, \varphi_1, \varphi_2, \varphi, \psi$ , для пространственной расчетной схемы.

Кинетическая энергия всей системы (плоскостной расчетной схемы):

$$T = \frac{1}{2} m_3 \cdot \left( \frac{a \cdot \dot{Z}_2 + b \cdot \dot{Z}_1}{a + b} \right)^2 + \frac{1}{2} \dot{Z}_3^2 + \frac{1}{2} m_1 \cdot \dot{Z}_1^2 + \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{J_1 + J_2}{2r^2} \cdot \dot{X}_3 \right)^2 + \frac{1}{2} \dot{X}_3^2 (m_1 + m_2 + m_3) + \frac{1}{2} J_3 \cdot \dot{\varphi}_3^2 + \frac{1}{2} m_1 \cdot \dot{Z}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \cdot \dot{Z}_2^2. \quad (1)$$

Потенциальная энергия всей системы (плоскостной расчетной схемы):

$$\Pi = \frac{1}{2} \cdot c_{11} (-a \cdot \varphi_3 - Z_1 + Z_3)^2 + \frac{1}{2} \cdot c_{21} (b \cdot \varphi_3 - Z_2 + Z_3)^2 + \frac{1}{2} \cdot c_1 \cdot Z_1^2 + \frac{1}{2} \cdot c_2 \cdot Z_2^2 - G_1 \cdot \cos \alpha \cdot Z_1 - G_2 \cdot \cos \alpha \cdot Z_2 - G_3 \cdot \cos \alpha \cdot Z_3. \quad (2)$$

Кинетическая энергия всей системы (пространственной расчетной схемы):

$$T = \frac{1}{2} \cdot (J_{XB} \cdot \dot{\psi}^2 + J_{YB} \cdot \dot{\varphi}^2 + \dot{X} \cdot \left( \frac{2(J_1 + J_2)}{r^2} + 2m_1 + 2m_2 + m_B \right) + J_{Y1} \cdot \dot{\varphi}_1^2 + J_{Y2} \cdot \dot{\varphi}_2^2 + m_B \cdot \dot{Z}^2 + m_1 \cdot \dot{Z}_1^2 + m_2 \cdot \dot{Z}_2^2). \quad (3)$$

Потенциальная энергия всей системы (пространственной расчетной схемы):

$$\Pi = \frac{1}{2} \cdot (c_s (\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \Delta_3^2 + \Delta_4^2) + c_{wr} (\delta_1^2 + \delta_2^2 + \delta_3^2 + \delta_4^2)). \quad (4)$$

Диссипативная функция (пространственной расчетной схемы):

$$D = \frac{1}{2} \cdot (\mu_s (\dot{\Delta}_1^2 + \dot{\Delta}_2^2 + \dot{\Delta}_3^2 + \dot{\Delta}_4^2) + \mu_{wr} (\dot{\delta}_1^2 + \dot{\delta}_2^2 + \dot{\delta}_3^2 + \dot{\delta}_4^2)), \quad (5)$$

где  $\Delta i$ ,  $\dot{\Delta i}$  – соответственно перемещение и скорость центра масс кузова автосамосвала, в процессе движения по заданному профилю пути;

$\delta i$ ,  $\dot{\delta i}$  – соответственно перемещение и скорость центра масс колес передней и задней подвески, в процессе движения по заданному профилю пути.

После подстановки и решения в программном продукте Wolfram Mathematica выражений для кинетической и потенциальной энергии, диссипативной функции с учетом зависимостей (1–5), а также соответствующих преобразований приходим к системе 6 дифференциальных уравнений второго порядка для плоскостной расчетной схемы и системе 7 дифференциальных уравнений второго порядка для пространственной расчетной схемы.

Решение уравнений описывают изменения обобщенных координат, которые позволяют оценить динамику автомобиля с учетом характера дороги.

$$m \ddot{X}_3 = \frac{Mg}{r} - f_{k1} R_1 - f_{k2} R_2 + mg \sin \alpha$$

$$(m_1 + m_3 k_0^2) \ddot{Z}_1 - m_3 k_0^2 (\ddot{Z}_2 + \ddot{Z}_3) + (c_1 + c_{11}) \dot{Z}_1 - c_{11} (Z_3 + \varphi a) + c_{11} \mu_{11} (\dot{Z}_1 - \dot{Z}_3 - \dot{\varphi} a) = g \cos \alpha (m_1 - m_3 k_0)$$

$$(m_2 + m_3 k_0^2) \ddot{Z}_1 - m_3 k_0^2 (\ddot{Z}_1 + \ddot{Z}_3) + (c_2 + c_{21}) \dot{Z}_2 - c_{21} (Z_3 - \varphi b) + c_{21} \mu_{21} (\dot{Z}_2 - \dot{Z}_3 + \dot{\varphi} b) = g \cos \alpha (m_2 + m_3 k_0)$$

$$m_3 \ddot{Z}_0 - c_{11} \mu_{11} (\dot{Z}_1 - \dot{Z}_3 - \dot{\varphi} a) - c_{21} \mu_{21} (\dot{Z}_2 - \dot{Z}_3 + \dot{\varphi} b) - c_{11} (Z_1 - Z_3 - \varphi a) - c_{21} (Z_2 - Z_3 + \varphi b) = m_3 g \cos \alpha$$

$$J_3 \ddot{\varphi}_3 - c_{11} \mu_{11} a (\dot{Z}_1 - \dot{Z}_3 - \dot{\varphi} a) + c_{21} \mu_{21} b (\dot{Z}_2 - \dot{Z}_3 + \dot{\varphi} b) - c_{11} a (Z_1 - Z_3 - \varphi a) + c_{21} b (Z_2 - Z_3 + \varphi b) = 0$$

$$\left( \frac{2(J_1 + J_2)}{r^2} + 2m_1 + 2m_2 + m_B \right) \cdot \ddot{X} = 0;$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} c_s (2(\cos(\frac{L}{2} \varphi_1) + Z - Z_1 + a\varphi - \frac{L}{2} \psi) + 2(\cos(\frac{L}{2} \varphi_2) + Z - Z_2 - b\varphi - \frac{L}{2} \psi) + 2(-\cos(\frac{L}{2} \varphi_1) + \\ & + Z - Z_1 + a\varphi + \frac{L}{2} \psi) + 2(-\cos(\frac{L}{2} \varphi_2) + Z - Z_2 - b\varphi + \frac{L}{2} \psi)) + \frac{1}{2} \mu_s (2(-\sin(\frac{L}{2} \varphi_1) + \dot{Z} - \dot{Z}_1 + \\ & + a\varphi - \frac{L}{2} \psi) + 2(-\sin(\frac{L}{2} \varphi_2) + \dot{Z} - \dot{Z}_2 - b\varphi - \frac{L}{2} \psi) + 2(\sin(\frac{L}{2} \varphi_1) + \dot{Z} - \dot{Z}_1 + a\varphi + \frac{L}{2} \psi) + \\ & + 2(\sin(\frac{L}{2} \varphi_2) + \dot{Z} - \dot{Z}_2 - b\varphi + \frac{L}{2} \psi)) \cdot m_B \ddot{Z} = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} (4c_{wr}(-P + Z_1 - \varphi_1) + c_s (-2(\cos(\frac{L}{2} \varphi_1) + Z - Z_1 + a\varphi - \frac{L}{2} \psi) - 2(-\cos(\frac{L}{2} \varphi_1) + Z - \\ & - Z_1 + a\varphi + \frac{L}{2} \psi))) + \frac{1}{2} (4\mu_{wr}(-P + \dot{Z}_1 - \dot{\varphi}_1) + \mu_s (-2(-\sin(\frac{L}{2} \varphi_1) + \dot{Z} - \dot{Z}_1 - a\varphi - \frac{L}{2} \psi) - \\ & - 2(\sin(\frac{L}{2} \varphi_1) + \dot{Z} - \dot{Z}_1 - a\varphi + \frac{L}{2} \psi))) + m_1 \cdot \ddot{Z}_1 = 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2}(4c_{wr}(-P + Z_2 - \varphi_2) + c_s(-2(\cos(\frac{L}{2}\varphi_2) + Z - Z_2 + b\varphi - \frac{L}{2}\psi) - 2(-\cos(\frac{L}{2}\varphi_2) + \\
& + Z - Z_2 + b\varphi + \frac{L}{2}\psi))) + \frac{1}{2}(4\mu_{wr}(-\dot{P} + \dot{Z}_2 - \dot{\varphi}_2) + \mu_s(-2(-\sin(\frac{L}{2}\varphi_2) + \dot{Z} - \dot{Z}_2 - b\dot{\varphi} - \frac{L}{2}\dot{\psi}) - \\
& - 2(\sin(\frac{L}{2}\varphi_2) + \dot{Z} - \dot{Z}_2 - b\dot{\varphi} + \frac{L}{2}\dot{\psi}))) + m_2 \cdot \ddot{Z}_2 = 0; \\
& \frac{1}{2}c_s(2a(\cos(\frac{L}{2}\varphi_1) + Z - Z_1 + a\varphi - \frac{L}{2}\psi) - 2b(\cos(\frac{L}{2}\varphi_2) + Z - Z_2 - b\varphi - \frac{L}{2}\psi) + \\
& + 2a(-\cos(\frac{L}{2}\varphi_1) + Z - Z_1 + a\varphi + \frac{L}{2}\psi) - 2b(-\cos(\frac{L}{2}\varphi_2) + Z - Z_2 - b\varphi + \frac{L}{2}\psi)) + \\
& + \frac{1}{2}\mu_s(2a(-\sin(\frac{L}{2}\varphi_1) + \dot{Z} - \dot{Z}_1 + a\dot{\varphi} - \frac{L}{2}\dot{\psi}) - 2b(-\sin(\frac{L}{2}\varphi_2) + \dot{Z} - \dot{Z}_2 - b\dot{\varphi} - \frac{L}{2}\dot{\psi}) + \\
& + 2a(\sin(\frac{L}{2}\varphi_1) + \dot{Z} - \dot{Z}_1 + a\dot{\varphi} + \frac{L}{2}\dot{\psi}) - 2b(\sin(\frac{L}{2}\varphi_2) + \dot{Z} - \dot{Z}_2 - b\dot{\varphi} + \frac{L}{2}\dot{\psi})) + J_{YB}\ddot{\varphi} = 0; \\
& \frac{1}{2}(-4c_{wr}(-P + Z_1 - \varphi_1) + c_s(-L(\sin(\frac{L}{2}\varphi_1)(\cos(\frac{L}{2}\varphi_1) + Z - Z_1 + a\varphi - \frac{L}{2}\psi) + \\
& + L\sin(\frac{L}{2}\varphi_1)(\cos(\frac{L}{2}\varphi_1) + Z - Z_1 + a\varphi + \frac{L}{2}\psi))) + \frac{1}{2}(-4\mu_{wr}(-\dot{P} + \dot{Z}_1 - \dot{\varphi}_1) + \\
& + \mu_s(-L(\cos(\frac{L}{2}\dot{\varphi}_1)(-\sin(\frac{L}{2}\dot{\varphi}_1) + \dot{Z} - \dot{Z}_1 + a\dot{\varphi} - \frac{L}{2}\dot{\psi}) + L\cos(\frac{L}{2}\dot{\varphi}_1)(\sin(\frac{L}{2}\dot{\varphi}_1) + \\
& + \dot{Z} - \dot{Z}_1 + a\dot{\varphi} + \frac{L}{2}\dot{\psi})))J_{Y1}\ddot{\varphi}_1 = 0; \\
& \frac{1}{2}(-4c_{wr}(-P + Z_2 - \varphi_2) + c_s(-L(\sin(\frac{L}{2}\varphi_2)(\cos(\frac{L}{2}\varphi_2) + Z - Z_2 - b\varphi - \frac{L}{2}\psi) + \\
& + L\sin(\frac{L}{2}\varphi_2)(-\cos(\frac{L}{2}\varphi_2) + Z - Z_1 - a\varphi + \frac{L}{2}\psi))) + \frac{1}{2}(-4\mu_{wr}(-\dot{P} + \dot{Z}_2 - \dot{\varphi}_2) + \\
& + \mu_s(-L(\cos(\frac{L}{2}\dot{\varphi}_2)(-\sin(\frac{L}{2}\dot{\varphi}_2) + \dot{Z} - \dot{Z}_2 + b\dot{\varphi} - \frac{L}{2}\dot{\psi}) + \\
& + L\cos(\frac{L}{2}\dot{\varphi}_2)(\sin(\frac{L}{2}\dot{\varphi}_2) + \dot{Z} - \dot{Z}_1 - b\dot{\varphi} + \frac{L}{2}\dot{\psi})))J_{Y2}\ddot{\varphi}_2 = 0; \\
& \frac{1}{2}c_s(-L(\cos(\frac{L}{2}\varphi_1) + Z - Z_1 + a\varphi - \frac{L}{2}\psi) - L(\cos(\frac{L}{2}\varphi_2) + Z - Z_2 - b\varphi - \frac{L}{2}\psi) + \\
& + L(-\cos(\frac{L}{2}\varphi_1) + Z - Z_1 + a\varphi + \frac{L}{2}\psi) + L(-\cos(\frac{L}{2}\varphi_2) + Z - Z_2 - b\varphi + \frac{L}{2}\psi)) + \\
& + \frac{1}{2}\mu_s(-L(-\sin(\frac{L}{2}\dot{\varphi}_1) + \dot{Z} - \dot{Z}_1 + a\dot{\varphi} - \frac{L}{2}\dot{\psi}) - L(-\sin(\frac{L}{2}\dot{\varphi}_2) + \dot{Z} - \dot{Z}_2 - b\dot{\varphi} - \frac{L}{2}\dot{\psi}) + \\
& + L(\sin(\frac{L}{2}\dot{\varphi}_1) + \dot{Z} - \dot{Z}_1 + a\dot{\varphi} + \frac{L}{2}\dot{\psi}) + L(\sin(\frac{L}{2}\dot{\varphi}_2) + \dot{Z} - \dot{Z}_2 - b\dot{\varphi} + \frac{L}{2}\dot{\psi})) + J_{XB}\ddot{\psi} = 0,
\end{aligned}$$

На рис. 2-3 приведены графики изменения основных динамических показателей автосамосвала при движении по участку дороги с продольным уклоном дороги  $i = 7\%$ , при наличии мелких неровностей на протяжении 10 и 20 секунд, для плоскостной и пространственной схем соответственно.

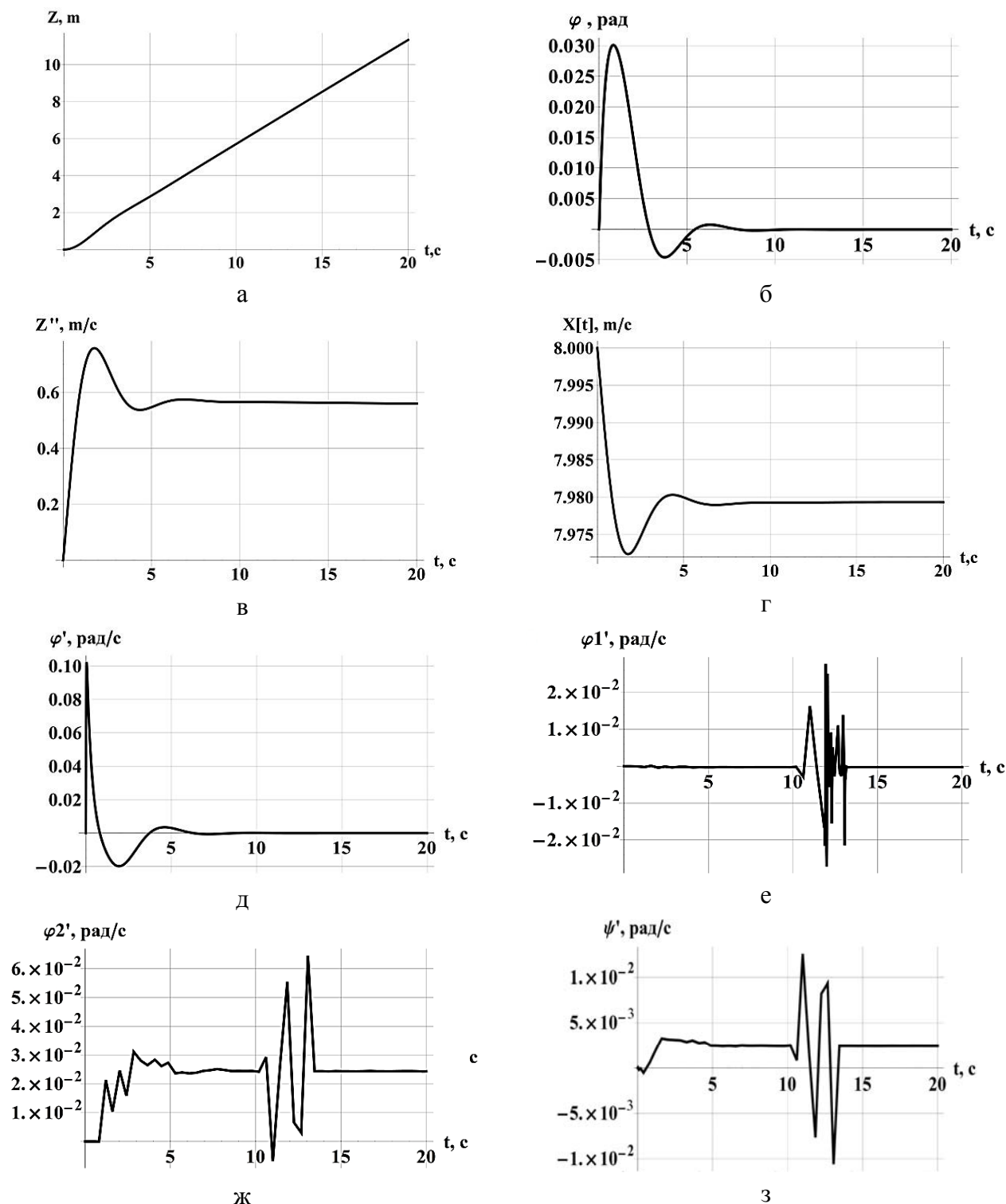


Рис. 2. Графики параметров движения по участку дороги с продольным уклоном дороги  $i = 7\%$ , при наличии мелких неровностей на протяжении 20 секунд:

а – перемещение центра масс автосамосвала по вертикали с учетом функции  $P(x)$ ;  
 б – угловое перемещение относительно оси центра масс автосамосвала (продольный тангаж);  
 в – ускорение; г – ускорение автосамосвала по курсу с уклоном в  $i = 7\%$ ; д – угловое ускорение автосамосвала относительно поперечной оси  $Y$ , проходящей через центр масс автосамосвала;  
 е – угловое ускорение передней оси относительно центра масс; ж – угловое ускорение задней оси относительно центра масс; з – угловое ускорение автосамосвала относительно продольной оси  $X$ , проходящей через центра масс

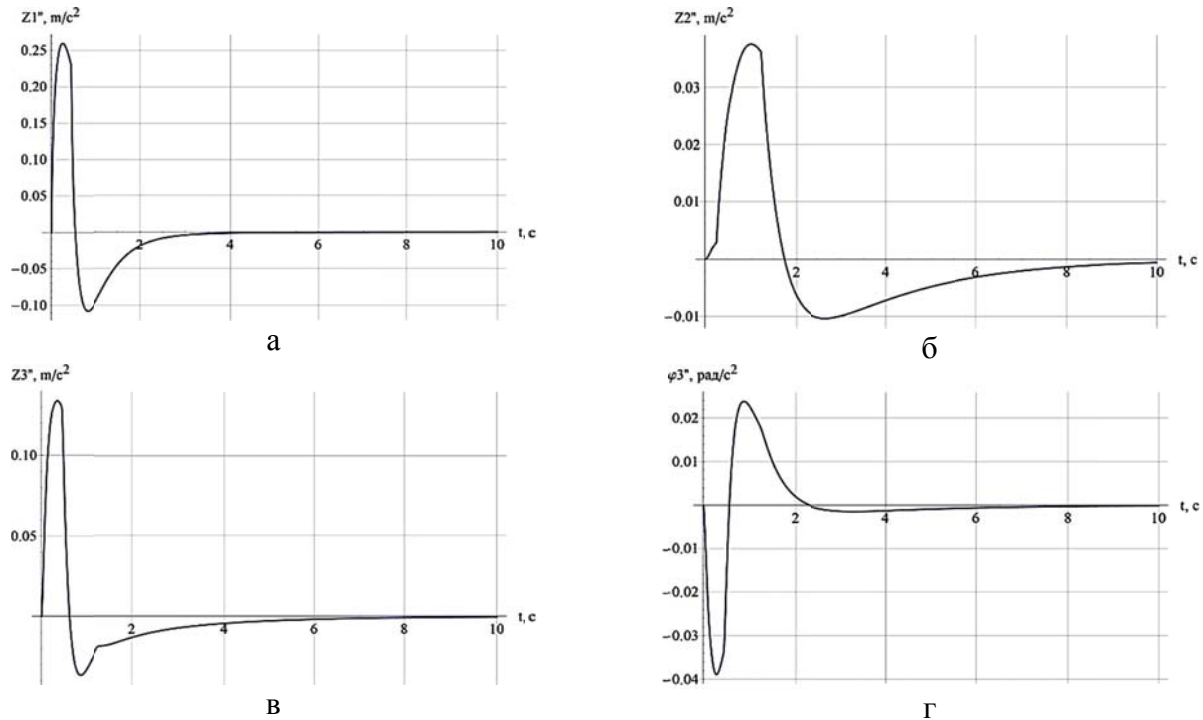


Рис. 3. Графики параметров движения по участку дороги с продольным уклоном дороги  $i = 7\%$ , при наличии мелких неровностей на протяжении 10 секунд:

а – вертикальное ускорение передней оси автосамосвала; б – вертикальное ускорение задней оси автосамосвала; в – вертикальное ускорение центра масс автосамосвала; г – угловое ускорение относительно оси центра масс автосамосвала

## ВЫВОДЫ

Построена математическая модель движения карьерного автосамосвала, а также получены зависимости для оценки влияния профиля дороги на основные динамические и эксплуатационные характеристики грузовых автомобилей. По результатам расчета из графических зависимостей, приведенных на рис. 2–3, можно оценить величину смещения подвесок передних и задних колес, а так же центра масс кузова. Кроме того, получены соответствующие значения ускорений, что позволяет оценить инерционную нагрузку на отдельные части конструкции машины при преодолении препятствий.

Полученные математические модели движения карьерного автосамосвала позволят оценить влияние изолированной неровности дороги, а также конструкционных параметров автосамосвала на основные динамические и эксплуатационные тяговые характеристики.

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Зырянов И. В. Алгоритм управления скоростным режимом карьерных автосамосвалов при низких температурах / И. В. Зырянов // *Кольма*. – 1997. – № 1. – С. 55–57.
2. Бунякин А. В. Комплексная оценка и прогнозирование показателей качества эксплуатации карьерных автосамосвалов : дис. канд. техн. наук / Бунякин А. В. – Кемерово, 2004. – 306 с.
3. Смирнов Г. А. Теория движения колесных машин / Г. А. Смирнов. – М. : Машиностроение, 1990. – 352 с.
4. Басманов С. В. Математическая модель оптимизации параметров карьерных автосамосвалов [Текст] / Ю. Е. Воронов, С. В. Басманов // *Известия высших учебных заведений. Горный журнал*. – Екатеринбург, 2007. – № 8. – С. 58–62.
5. Мокін Б. І. Математичні моделі багатомасових розподілених динамічних систем для задач оптимізації (частина 1) / Б. І. Мокін, О. Б. Мокін // *Вісник Вінницького політехнічного інституту*. – Вінниця : «УНІВЕРСУМ-Вінниця», 2008. – № 6. – С. 55–58.

Статья поступила в редакцию 11.06.2013 г.